

# Diplomado en Análisis de Información Geoespacial

## Densidad de Kernel

**Autores:**

**M. en G. Camilo A. Caudillo Cos**

**M. en G. Claudia Coronel Enríquez**

## Introducción

La toma de decisiones y el monitoreo de procesos puntuales, como los relacionados con la actividad policiaca, requiere instrumentos de modelaje matemático para transformar la información inicial en un mensaje con el sentido deseado a partir de un proceso de producción y el contexto de uso e implementación específico.

Típicamente, los registros de eventos ligados al espacio se representan con puntos (como incidentes delictivos), esto implica la necesidad de métodos apropiados para extraer patrones de este tipo de datos. Sin embargo los puntos normalmente no se asocian con ponderaciones, es decir tienen una intensidad idéntica.

Pero, ¿qué es un patrón? En el caso de los incidentes delictivos, un patrón surge como la acumulación de eventos en el espacio en un lapso específico. Es decir partimos de la hipótesis de que hay una distribución desigual de los eventos y necesitamos herramientas para caracterizar dichos patrones.

### ¿Qué es un hot spot?

Las áreas donde se concentra el crimen son llamadas hot spots y tienen como elementos definitorios la intensidad y la extensión. Es decir, un hot spot es un área donde ocurren más eventos criminales en comparación con el promedio o donde la población tiene un mayor riesgo de victimización.

La extensión obedece a la **escala o nivel del análisis**: pueden existir “regiones calientes”, “barrios calientes”, “calles calientes”. Para algunos analistas la noción de hot spot se asocia únicamente con áreas pequeñas con altas concentraciones de eventos (Eck et al. 2005)

Si bien el método que nos ocupa en esta ocasión no es una técnica de detección de hot spots propiamente, permite la visualización de patrones de concentración de densidad de eventos.

## Objetivos

El estudiante se familiarizará con el método de interpolación conocido como **estimación de densidad de kernel** para la detección de patrones en datos puntuales.

El estudiante será capaz de distinguir los supuestos/parámetros básicos asociados:

- Función de probabilidad
- Ancho de banda

## El Método

Dentro de la amplia gama de métodos de detección/visualización de patrones espaciales, los mapas de densidades son uno de los más populares, aunque en sentido estricto no son una técnica de hot spot sino una interpolación que se utiliza para identificar hot spots.

Existe una importante gama de métodos de interpolación en los que la pregunta fundamental es; ¿cuál es el valor que asume una variable en una zona donde no tenemos datos?

Algunos de esos métodos son el Kriging, las superficies de tendencia, el inverso de la distancia y los modelos de regresión local, (Anselin, 1992; Cleveland et al. 1993, Venables & Ripley, 1997) los cuales requieren en su mayoría - que los puntos de muestreo/entrada asuman valores heterogéneos diferentes de cero.

Un rasgo particular de cuando trabajamos con datos sobre incidentes delictivos es que no hacemos muestreo de la información, el universo está dado por la totalidad de los eventos registrados, adicionalmente cada punto representa un evento particular.

Es un hecho que no en toda la superficie de una zona de estudio han sucedido delitos, pero existe una probabilidad de que ocurran, la estimación de densidad de kernel sirve para calcular esa probabilidad (Smith & Bruce 2008, 60-64) de modo que la interpolación produce "superficies de riesgo".

### **Funciones de probabilidad**

La función que asignamos para la distribución en el espacio de las densidades es el primer supuesto fundamental. En este sentido, en función del software se puede escoger el método de interpolación, es decir el supuesto de la distribución de probabilidad sobre el comportamiento del fenómeno que analizamos.

Primero describiremos varias opciones que asumen diferentes supuestos sobre el comportamiento de la probabilidad de ocurrencia de un evento, posteriormente ilustraremos el método de forma gráfica.

La función básica es la gaussiana, que implica una forma de campana suave y está dada por la siguiente fórmula:

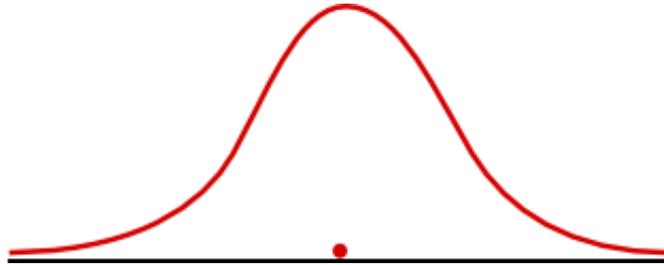
$$g(x_j) = \sum \left\{ [W_i I_i] \frac{1}{h^2 2\pi} e^{-\frac{d_{ij}^2}{2h^2}} \right\}$$

Donde:

$d_{ij}$  es la distancia entre un punto y cualquier punto de referencia en la región de estudio  
 $h$  es la desviación estándar (ancho de banda) de la distribución

$W_i$  es un peso (Por lo general cada punto tiene un peso = 1)

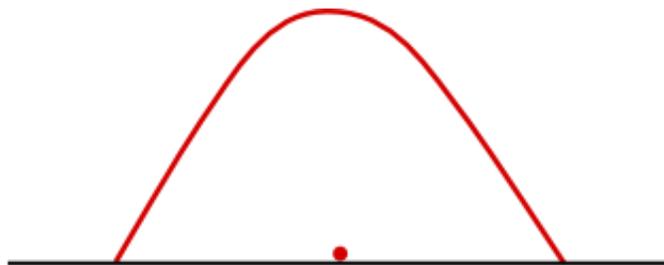
$I_i$  es la intensidad en la locación puntual



Sin embargo en algunos softwares (particularmente el CrimeStat) se implementan otro tipo de funciones que a continuación se muestran:

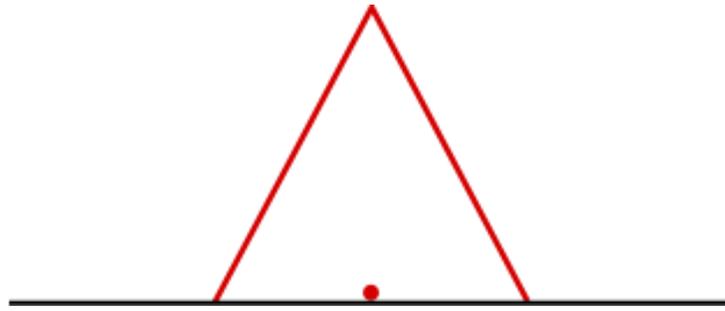
Función cuártica o esférica. Supone una distribución relativamente uniforme que al llegar a cierto umbral decae sin suavidad:

$$g(x_j) = \sum \left\{ [W_i I_i] \frac{3}{h^2 \pi} \left[ 1 - \frac{d_{ij}^2}{h^2} \right] \right\}$$



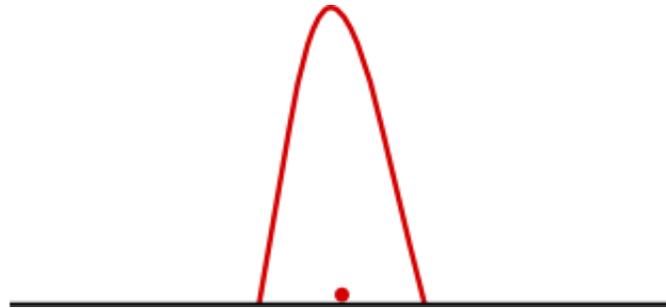
Función triangular o cónica. Describe el descenso lineal de la probabilidad de ocurrencia de un evento:

$$g(x_j) = \sum \left\{ K - \left( \frac{K}{h} \right) d_{ij} \right\}$$



Función exponencial negativa. Supone el descenso rápido de la probabilidad de ocurrencia de un evento:

$$g(x_j) = \sum A e^{K \cdot d_{ij}}$$



Función uniforme. Asigna el mismo peso dentro del umbral:

$$g(x_i) = \sum K$$



En todos los casos el parámetro crítico es el umbral  $h$ , después de dicha distancia el valor de la función es cero.

## Ejemplos en dos y tres dimensiones

Al método también se le llama suavizamiento de kernel, pues distribuye el valor puntual en una superficie de acuerdo con dos parámetros: una función de distribución de probabilidad (en este caso utilizamos la función normal gaussiana), y un ancho de banda.

Lo anterior es muy sencillo de ilustrar en dos dimensiones, pues cada punto se "redistribuye" con la forma de una función y la densidad total es la suma de dichas funciones. Por lo anterior resulta claro que al existir una menor distancia entre puntos, mayor será la densidad local acumulada.

En el lenguaje del procesamiento digital de imágenes el método sería un filtrado "paso baja".

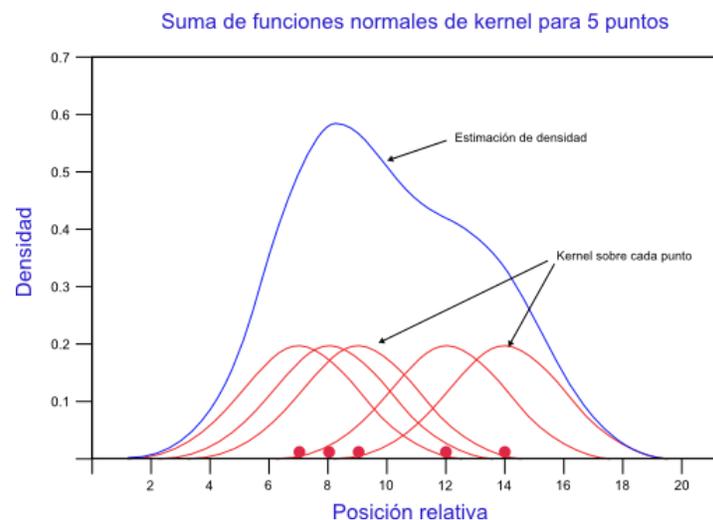


Figura 1. Estimación de densidad de Kernel. Adaptado de Wilson, R. y Eck, J. (2005: 27).

Ahora ilustraremos con un ejemplo tridimensional.

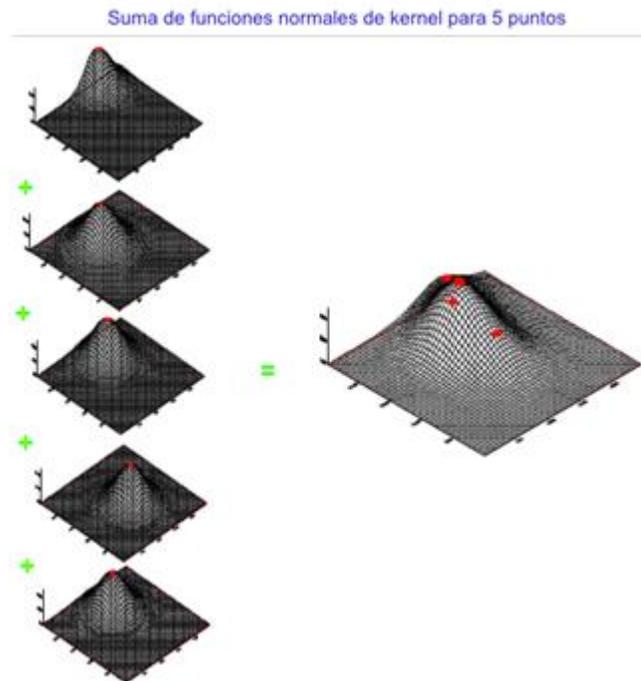


Figura 2. Densidad de kernel en 3 dimensiones. Levine, E. (2004, 8.11).

Otra aplicación del método es la estimación de superficies de riesgos tomando en cuenta una población base, a esta variante se le conoce como kernel dual y no es más que la estimación de tasas en la superficie interpolada, por ejemplo podemos tomar como numerador la cantidad de robos a casa habitación y como denominador la cantidad de viviendas, por lo general es difícil tener a la mano información sobre la distribución de la variable para el denominador, en muchas ocasiones solo disponemos de datos agregados a escalas muy gruesas, entonces debemos hacer algún supuesto sobre la distribución del fenómeno (robo a casa habitación) y sobre la distribución del denominador (densidad de viviendas).

## Aplicaciones

En esta sección mostramos diferentes aplicaciones del método y algunas observaciones útiles sobre dichas aplicaciones.

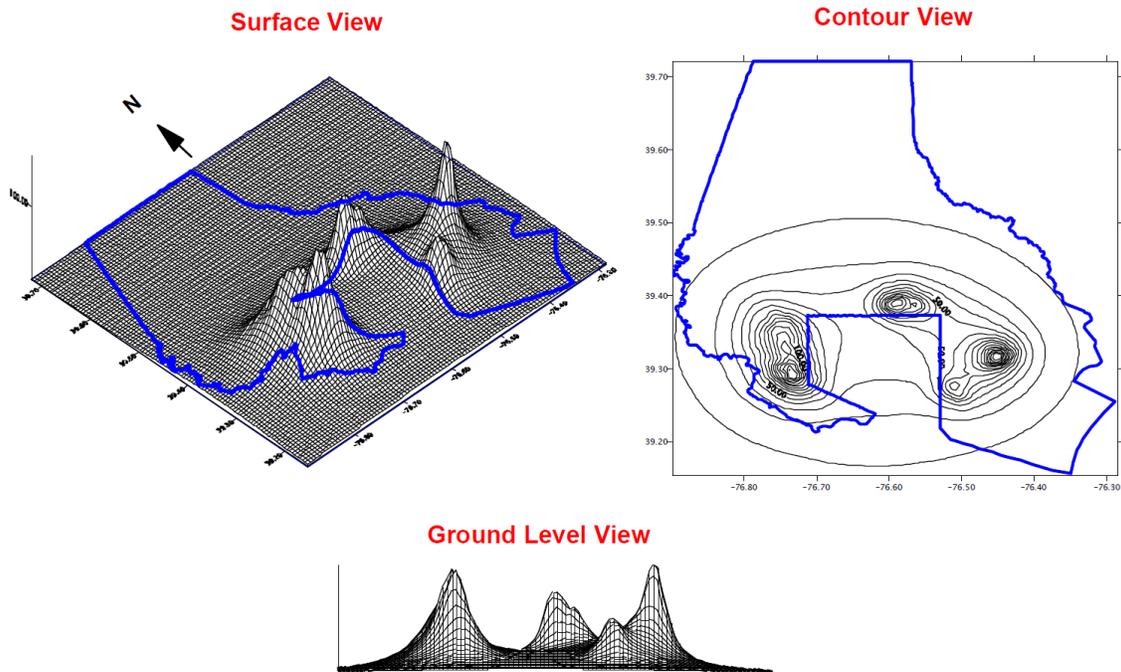


Figura 3. Modelos del robo de vehículos en la ciudad de Baltimore. Levine, N. (2004:8.18).

En la imagen anterior vemos el resultado del modelado del robo de vehículos en la ciudad de Baltimore durante el periodo 1996-1997 (Levine, 2004: 8.18). La producción de vistas en tercera dimensión, aprovechando la naturaleza del método, es una prueba de lo intuitivo y claro que resulta el mensaje del mapa.

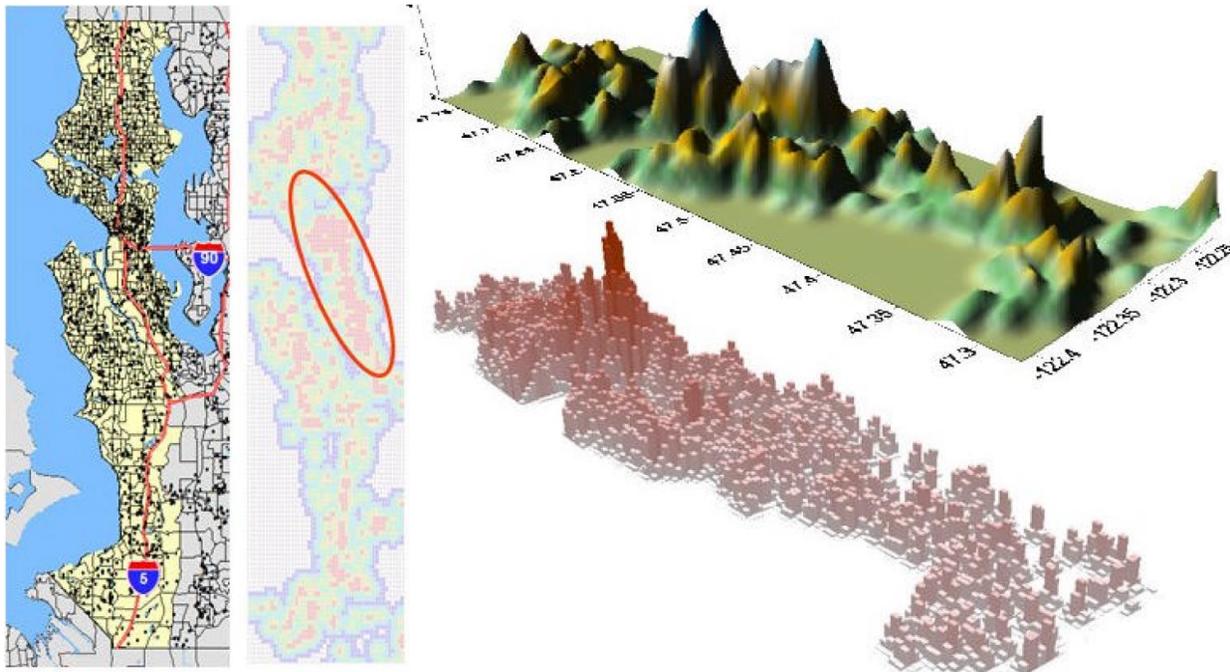


Figura 4. Estimación kernel dual: Tasa de mortalidad infantil en Seattle. Levine, N. (2004: 8.24).

La imagen anterior muestra la estimación de kernel dual (mapa con la elipse roja) de la tasa de mortalidad infantil en Seattle (Ned Levine, 2004: 8.24); los datos de nacimientos y mortalidad infantil fueron geocodificados a nivel de calle, dando por resultado la estimación de una tasa de mortalidad infantil estandarizada (mapa de prismas) y la estimación de kernel dual (mapa en 3D suavizado).

[El blog Big Think, el 14 de junio de 2010, publicó la topografía del crimen en San Francisco.](#) Los mapas deforman la imagen satelital de la ciudad y muestra el patrón estimado de diferentes tipos de delito, hecho que nos da una primera lección: dependiendo del fenómeno que analicemos, el resultado puede variar.

Otra lección importante es respecto a las limitaciones del método, es que el resultado puede ser engañoso (por lo general una superficie suave), nos indique tendencias locales, sin embargo como todo método de interpolación, asigna valores continuos

independientemente de que se registraran incidentes en ciertas zonas, es más fácil aclarar este punto si ejemplificamos con el robo en cajeros, pues el resultado de la interpolación nos señalará que hay robos en zonas cercanas a los bancos en las que definitivamente ¡no existen cajeros!

Otra lección importante, relacionada con la anterior, deriva de las teorías que explican el comportamiento criminal asociado a un lugar. Nos referimos a la teoría de la actividad rutinaria, la cual nos alerta sobre tres factores sin los que no existe el crimen: ofensor, víctima plausible y vigilante deficiente, entendido éste como un ser humano o dispositivo que debería cumplir con la función de vigilar.

El pulso de la ciudad es lo que nos indica los momentos de mayor actividad, dicho de otro modo, el patrón acumulado de la actividad delictiva es el resultado de procesos sociales y económicos distribuidos desigualmente en el espacio y en el tiempo.

La falacia estacionaria es un concepto asociado al posible error de interpretación al que conduce el uso de datos que mezcla información de momentos diferentes, como puede ser el día y la noche.

A continuación se presenta la densidad de población de 100 ciudades mexicanas y la población por municipio en 2010, de acuerdo con el Censo de Población y Vivienda publicado por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía ese mismo año.

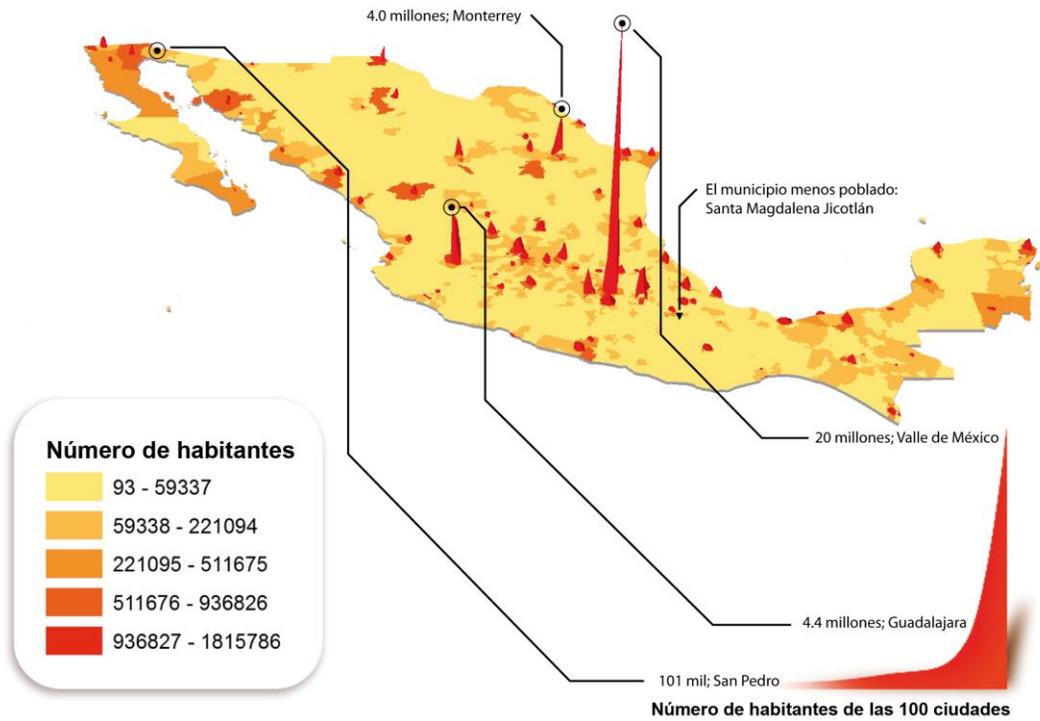


Figura 5. Caudillo, C. (2010). Densidad de población de 100 ciudades mexicanas y la población por municipio en el año 2010. Construcción propia.